ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

CONCOURS EXTERNE I.E.E.A.C CF ET CT

EPREUVE OPTIONNELLE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 H 00
COEF : 2

Les deux problèmes sont indépendants l'un de l'autre.

I. PREMIER PROBLEME

Soit V l'ensemble des fonctions φ d'une variable réelle, à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et telles que pour tout k appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, la fonction $\varphi^{(k)}$, dérivée d'ordre k de φ, soit bornée sur $\mathbb{R}$. On notera $M_k(\varphi)$ la borne supérieure sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longrightarrow \left| \varphi^{(k)}(x) \right|$. On pose par convention $\varphi^{(o)} = \varphi$.

Soit E l'ensemble des fonctions $\varphi \in V$ telles que la série de terme général $\frac{M_k(\varphi)}{k!}$ soit convergente. Pour toute fonction $\varphi \in E$ on pose

$$\| \varphi \| = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{M_k(\varphi)}{k!}$$

Dans tout ce problème, on désigne par λ une constante réelle telle que $\lambda > 1$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la fonction réelle de la variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n(x) = \frac{1}{\lambda^n} \cos n x$$

Enfin, on désigne par e la base des logarithmes népériens.

I.1- a) Démontrer que V, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de V, et que l'application $\varphi \longrightarrow \| \varphi \|$ de E dans $\mathbb{R}$ est une norme sur E.

b) Démontrer que, si φ et Ψ sont deux fonctions appartenant à E, alors leur produit usuel $\varphi\Psi$ appartient à E, et que, pour toute fonction $\Psi \in E$, l'application linéaire $L_\Psi : \varphi \longrightarrow \varphi\Psi$ de E dans E est continue. Quelle est sa norme ?

c) Soit $\varphi \in E$ et soit $x_o \in \mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y| < 1$, la série de terme général $\varphi^{(k)}(x_o) \frac{y^k}{k!}$ est absolument convergente, et calculer sa somme $\sum_{k=o}^{\infty} \varphi^{(k)}(x_o) \frac{y^k}{k!}$.

I.2 - a) Soit $r \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $u_n^{(r)}$ appartient à E et calculer $\| u_n^{(r)} \|$. Etudier et discuter, suivant les valeurs de λ et de r, la convergence de la suite $n \longrightarrow \| u_n^{(r)} \|$ et trouver sa limite lorsqu'elle existe.

b) Soit $n \longrightarrow \varphi_n$ une suite de fonctions appartenant à E. Démontrer que si la suite $n \longrightarrow \| \varphi_n \|$ converge vers o lorsque $n \longrightarrow \infty$, alors, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions $n \longrightarrow \varphi_n^{(k)}$ converge vers la fonction nulle uniformément sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.
La réciproque est-elle exacte ?

I.3 - a) Soit $r \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Démontrer que la série de fonctions de terme général $u_n^{(r)}$ converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$. On pose alors :

$$\Phi = \sum_{n=o}^{\infty} u_n$$

Démontrer, par récurrence sur r, que Φ est de classe C^r, et trouver une relation entre $\sum_{n=o}^{\infty} u_n^{(r)}$ et Φ. En déduire que $\Phi \in V$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\Phi(x)$ en fonction de cos x et de λ, et retrouver la propriété $\Phi \in V$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $I_n = \int_o^{\pi} \frac{\cos n x}{\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1} dx$

I.4 - a) Soit a un nombre réel tel que $o < a < \operatorname{Log} \lambda$, où Log désigne le logarithme népérien.
Démontrer qu'il existe un nombre réel positif A tel que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on ait : $\sum_{k=o}^{p} M_k(\Phi) \frac{a^k}{k!} < A$

En déduire, pour tout nombre réel x tel que $|x| < \operatorname{Log} \lambda$, la nature de la série de terme général $\Phi^{(k)}(o) \frac{x^k}{k!}$ et la somme $\sum_{k=o}^{\infty} \Phi^{(k)}(o) \frac{x^k}{k!}$.

b) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression de $\Phi^{(2k)}$ sous forme de la somme d'une série obtenue à la question I.3.a, comparer $\left| \Phi^{(2k)}(o) \right|$ et $\sum_{n=o}^{N} \frac{n^{2k}}{\lambda^n}$.

En déduire la nature de la série de terme général $\left| \Phi^{(k)}(o) \right| \frac{(\operatorname{Log} \lambda)^k}{k!}$.

c) On suppose $\lambda < e$. La fonction Φ appartient-elle à E ?

T.S.V.P.

École Nationale de l'Aviation Civile
Concours ingénieur. Épreuve optionnelle de Math. 1986 Page 194 bis

I.5- On suppose maintenant $\lambda > e$.

a) Démontrer que $\Phi \in E$.

b) Etudier les limites des suites $N \longrightarrow \left\| \Phi - \sum_{n=0}^{N} u_n \right\|$

et $N \longrightarrow \left\| \sum_{n=0}^{N} u_n \right\|$ lorsque $N \longrightarrow \infty$ dans $\mathbb{N}$.

c) Démontrer que la série de terme général $\|u_n\|$ converge, et comparer $\|\Phi\|$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$.

II. DEUXIEME PROBLEME

II. 1. Trouver le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{x^n}{4n^2-1}$, où n parcourt $\mathbb{N}$.

Démontrer qu'elle converge uniformément sur l'intervalle fermé $[-R, +R]$, et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$ pour tout x appartenant à cet intervalle.

On distinguera les cas $x \geqslant 0$ et $x < 0$.

II. 2. Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left| \sin \frac{x}{2} \right| .$$

Démontrer qu'il existe une suite $n \longrightarrow a_n$ de nombres réels telle que, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $w_n(x) = a_n \cos n x$,

la série de fonctions de terme général w_n converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$, et a pour somme $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = f$.

Calculer a_n en fonction de n .

II. 3. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et soit h une fonction réelle de la variable réelle, de classe C^1 sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Pour tout réel λ posons $J(\lambda) = \int_a^b h(t) \left| \sin \frac{\lambda t}{2} \right| dt$.

a) Démontrer que, lorsque $\lambda \to +\infty$, l'intégrale $I(\lambda) = \int_a^b h(t).\cos(\lambda t)dt$ tend vers une limite dont on déterminera la valeur.

b) Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série de terme général $a_n I(n\lambda)$ est absolument convergente et calculer sa somme.

c) Soit ρ un nombre réel tel que $\rho > 0$. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, I(n\lambda) \right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \left| a_n \, I(n\lambda) \right| \right) + \rho$$

En déduire que, lorsque $\lambda \to +\infty$, l'intégrale $J(\lambda)$ tend vers une limite dont on donnera l'expression en fonction de $\int_a^b h(t)\,dt$.

II. 4 Les hypothèses étant celles de la question II-3, soit q une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période 2π, et continue sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t)\,dt$$

et, pour tout réel λ ,

$$K(\lambda) = \int_a^b h(t)\, q(\lambda t)\,dt$$

a) On fait l'hypothèse $\bar{q}=0$. Etudier, pour tout réel t fixé, la limite lorsque $\lambda \to +\infty$ de l'intégrale

$$v_t(\lambda) = \int_0^t q(\lambda s)\,ds$$

et en déduire la limite lorsque $\lambda \to +\infty$ de l'intégrale $K(\lambda)$.

b) On ne fait plus l'hypothèse $\bar{q}=0$. Etudier lorsque $\lambda \to +\infty$ la limite de $K(\lambda)$.